CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală – 28 februarie 2015
clasa a X – a
Filiera tehnologică –Profil tehnic – toate specializările profesionale

BAREM DE CORECTARE

1.

a) i) Dacă x = y = z $\Rightarrow$ $2^{x+1}=2^x$ $\Rightarrow$

$x+1=x \Rightarrow 1=0$ fals

ii) Fie x = y = n $\in \mathbb{Z} \Rightarrow 2^n + 2^n = 2^Z \Rightarrow Z = n+1$

Deci tripletele $(n, n, n+1)$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{Z}$ sunt soluţii

b) Presupunem prin absurd că $2^x + 2^y \leq 2^{z+1}$ şi $2^{x+z} + 2^{y+z} \leq 2^{x+y+1}$

Cu inegalitatea mediilor avem:

$2 \cdot 2^{\frac{x+y}{2}} \leq 2^x + 2^y \leq 2^{z+1}$ şi

$2 \cdot 2^{\frac{x+y+2z}{2}} \leq 2^{x+z} + 2^{y+z} \leq 2^{x+y+1}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x+y}{2} \leq z$ şi $\frac{x+y+2z}{2} \leq x+y$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x+y}{2} \leq z$ şi $\frac{x+y}{2} \geq z$ $\Rightarrow$

$\frac{x+y}{2} = z \Rightarrow x, z, y$ în progresie aritmetică,

contradicţie.

2.

a) Avem $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}(\log_a 15 + \log_a 21 + \log_a 35) =$ 1p

$= \frac{1}{2}\log_a(15 \cdot 21 \cdot 35) = \frac{1}{2}\log_a(3 \cdot 5 \cdot 7)^2 =$ 1p

$= \log_a(3 \cdot 5 \cdot 7) = \log_a 3 + \log_a 5 + \log_a 7 =$.............. ....1p

$= \frac{1}{\log_3 a} + \frac{1}{\log_5 a} + \frac{1}{\log_7 a}$ 1p

b) Avem $\log_2 n - \log_2(n+1) + \log_2(n+2) = \log_2 \frac{n(n+2)}{n+1}$. 1p

Egalitatea din enunț se scrie:

$\left[\frac{n(n+2)}{n+1}\right] = n \Leftrightarrow$.............. ....1p

$\Leftrightarrow$ $\left[n + \frac{n}{n+1}\right] = n$, evident. …………………………… ……………………………….………1p

3.

a) ε soluție a ecuației => $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ ………………… ……………………….……………1p

$$\varepsilon^3 = 1$$

desfacerea parantezei ………………...…………………… ……………………….…………1p

finalizare $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac$ …...…………………… …………………….………….1p

b) $\frac{b}{c} = \alpha \in R \Rightarrow b = \alpha c$ ……………..………………………………….…………1p

$a^2z^2 + a\alpha cz + c^2 = 0$

$\Delta = a^2c^2(\alpha^2 - 4)$ ………………...…………………… ……………………….…………1p

Dacă $|\alpha| \geq 2$, $z_{1,2} = \frac{c}{2a}\left(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4}\right)$

Dacă $|\alpha| < 2$, $z_{1,2} = \frac{c}{2a}\left(-\alpha \pm \sqrt{4 - \alpha^2}\, i\right)$

Concluzie $\frac{z_1}{z_2} \in R$ în primul caz şi $|z_1| = |z_2| = \left|\frac{c}{a}\right|$ în al doilea caz ………….…………1p

4.

a) $(i+1)^2 = 2i$, $i^2 = -1$, $i^4 = 1$ …………………… …...……………..….………1p

calcul ………………………...…………………… ………………….……………1p

finalizare $i^4 = 1$ ...……………………....…………………… ………………….………………1p

b) $\left|\frac{z+3}{z-3}\right| = 1 \Rightarrow |z+3| = |z-3| \Rightarrow |x+3+yi| = |x-3+yi|$. ………………...…1p

$\left|\frac{z-3i}{z+3i}\right| = 2 \Rightarrow |x + (y-3)i| = 2|x + (y+3)i|$. …… ………………….………………1p

Aplicăm formula modulului, rezolvăm ecuaţiile obţinem: $x = 0$, $y_1 = -9$, $y_2 = -1$ …..….1p

finalizare $z_1 = -i$

$z_2 = -9i$ ...…………………...…………………… ……………………….………1p